

DISEÑO DE TELESCOPIO ASTRONÓMICO REFLECTOR CON FOCO CASSEGRAIN CLÁSICO

Por Gerardo Lozano

El presente estudio es un intento por comprender el comportamiento de la luz en el diseño de un telescopio astronómico, en toda ocasión me encontré con información muy especializada, por lo tanto confusa y difícil de entender para alguien que como yo no es especialista en la materia, por lo que me di a la tarea de tratar de encontrar por medios geométricos y con matemáticas simples, una explicación sencilla de tal fenómeno.

Los libros especializados en física óptica, nos dicen que la luz que se refleja en un espejo plano, lo hace en un ángulo igual a aquel con el que incide a la superficie del espejo. Por más que busque una explicación lógica de ese fenómeno me vi forzado a conformarme con tener que creer por pura fe en lo escrito y así sucede con casi todo lo que se refiere al cálculo y diseño de un telescopio.

Iniciemos pues la tarea propuesta comenzando con una explicación de carácter muy general, sobre el mecanismo que nos conduce al conocimiento que se tiene sobre el comportamiento de la naturaleza.

Todo el conocimiento sobre el comportamiento de la Naturaleza que se posee, se puede deducir de unos cuantos conocimientos que se desprenden de la observación, aun que no se comprendan sus causas, estos son los llamados Axiomas.

Los Teoremas son conclusiones a las que se llega por razonamientos lógicos partiendo de axiomas, no se puede dudar o discutir la veracidad de un teorema sin poner en tela de juicio a los axiomas implicados, es diferente al caso de las Teorías, las cuales son suposiciones que pueden ser razonables o no, son sujetas a comprobación, y pueden ser coincidentes aproximadamente con los hechos, por lo tanto son sujetas a cambios o incluso pueden ser desechadas.

Siempre se ha observado que la Naturaleza se comporta bajo unos principios reiteradamente comprobados y a los cuales podemos considerar como axiomas, tal es el caso de que la materia o átomos, siempre tienden a permanecer o a cambiar a un estado en el cual conservan el menor contenido de energía posible, también se ha deducido el axioma de que todo, materia o energía, siempre que se desplazan siguen el trayecto de la menor distancia posible, esto es la “geodésica” para cualquier superficie, para el caso de una superficie esférica la geodésica es el círculo máximo y para una superficie plana o euclidiana, la geodésica es la línea recta.

De lo anteriormente dicho se desprende axiomáticamente que un fotón de luz seguirá el trayecto mas corto posible desde una fuente hasta un observador, es decir, la geodésica, siempre que el medio de propagación sea homogéneo. Ahora analicemos cuál es esta trayectoria en el caso de un rayo de luz que se refleja en un espejo plano. Intentaremos diseñar un telescopio usando teoremas comprobados.

REFLEXIÓN DE LA LUZ

Sean “A” y “B” las posiciones de una fuente de luz y de un observador respectivamente, “P” es el punto sobre un espejo plano en donde se refleja la luz para ser observada, ver fig. 1.

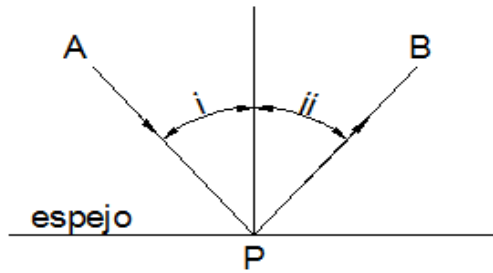


Fig. 1

Intentaremos demostrar que el menor trayecto de “A” a “B” que recorre un rayo de luz que se refleja en el espejo, es aquel en el que los ángulos que forma con la normal al espejo en “P”, (el incidente, “i” y el reflejado, “ii”), son iguales.

Existe una comprobación clásica debida a Pierre de Fermat e intentaremos explicarla de forma clara y sencilla.

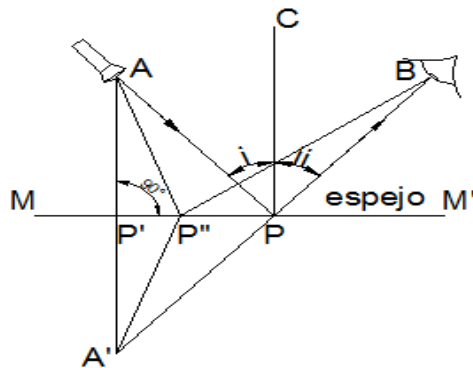


Fig. 1-a

En la figura 1-a tenemos una fuente de luz “A”, un observador “B” y un rayo de luz que se refleja en la superficie del espejo en “P” formando los ángulos iguales “i” e “ii”, aquí el rayo de luz sigue la trayectoria A P B que tiene una longitud determinada.

Supongamos ahora que el rayo se refleja en cualquier otro punto de la superficie del espejo como puede ser el punto P", aquí el trayecto que recorre el rayo de luz sería A P" B, para demostrar que este trayecto es mayor que A P B en el que los ángulos "i" e "ii" son iguales, tracemos una línea A P' que forma un ángulo recto con la superficie del espejo, proyectémosla hasta el punto A' donde coincide con la proyección de la línea B P, la distancia A P es igual que A' P, también son iguales las distancias A P" y A' P" obsérvese que el trayecto A P B del rayo de luz original es igual a A' P B y el trayecto del segundo rayo A P" B es igual a A' P" B, ahora observemos el triángulo A' P" B en donde la línea A' B es la hipotenusa y las líneas A' P" y P" B son los catetos, aquí se ve claramente que la distancia A' B es menor que la suma de las distancias A' P" y P" B pues en cualquier triángulo, la suma de dos de sus lados siempre será mayor que un tercer lado, lo mismo se puede razonar para cualquier otro punto de reflexión sobre el espejo.

Otra demostración debida a un esfuerzo personal utiliza una forma cónica, la elipse y en seguida presento el análisis.

LA ELIPSE

La Elipse, que es por definición, la posición de todos los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos llamados focos es constante.

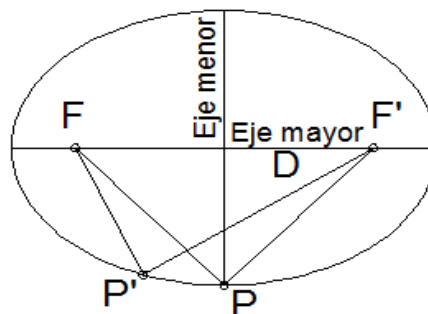


Fig. 2

En la figura 2 podemos apreciar una elipse en la que "F" y F' " son los focos y "P" y "P' " son dos puntos cualquiera de la elipse, se aprecian los ejes mayor y menor que se cruzan a 90° entre si en el centro de la elipse, [PF]' y [PF'], son los llamados radio vectores, de manera que:

$[PF] + [PF'] = K$ y $[P'F] + [P'F'] = K$, de donde $[PF] + [PF'] = [P'F] + [P'F']$, dicho de otra manera, la suma de las longitudes de los radio vectores es igual para cualquier punto de la elipse.

Démonos a la tarea de trazar una tangente a la elipse en cualquiera de sus puntos como puede ser P' (ver Fig. 3), podemos imaginar la Fig. 1 superpuesta sobre la fig. 3 de manera que el punto A (fuente de luz) coincida con F y el punto B (observador) coincida con F' , los radio vectores son los trayectos del rayo de luz y la tangente coincide con la superficie del espejo.

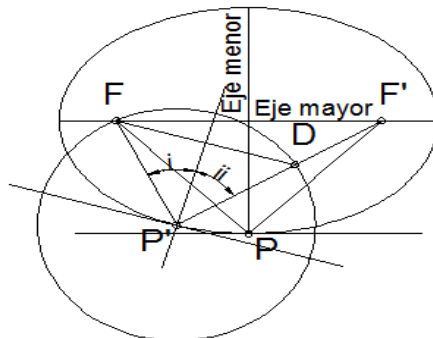


Fig. 3

Tracemos un círculo con centro en P' y que pase por F de tal manera que $[P'F]$ es un radio de dicho círculo y además este cortará al radio vector $[P'F']$ en D por lo que $[P'D]$ es también un radio del mismo círculo y la distancia $[FD]$ es una cuerda y si en su punto central se traza una perpendicular a ella, esa línea pasará forzosamente por el centro del círculo en P' (es un teorema fácil de entender con muy poco esfuerzo), y además dividirá al ángulo $FP'D$ (biseca) en dos ángulos iguales, i y ii , ahora tracemos una paralela a $[FD]$, ésta pasará por el centro del círculo, y solo tocará a la elipse en el punto P' por lo que es tangente a la elipse en ese punto, con lo cual queda demostrado que los ángulos i y ii que forman los radios vectores (rayos de luz) con la perpendicular a la tangente (espejo) son iguales.

Con el propósito de demostrar que la trayectoria de los rayos de luz provenientes de A y que se dirigen a B, reflejándose en la superficie del espejo, coinciden con los radio vectores (por ser la distancia mas corta), visualicemos el triángulo que se forma entre los puntos $\{FF'P'\}$ ² de la figura 3, cuyo perímetro será la suma de sus tres lados, $[FF']$, $[FP']$ y $[F'P']$, a manera de facilitar la explicación consideremos al punto F como el vértice 1, al punto F' como el vértice 2 y a P' como el vértice 3.

Toda vez que la distancia entre focos de la elipse $[FF']$ es constante y que por la definición de elipse, la suma de los radio vectores es constante, el perímetro de todos los triángulos cuyos vértices coincidan con los focos y con cualquier punto de la elipse, es también constante (siempre igual).

Si tenemos un triángulo cualquiera y deseamos trazar otro triángulo con uno de sus lados igual pero cuyo perímetro sea menor, es evidente que tenemos que trazar un triángulo cuya suma de sus lados restantes sea de menor tamaño, lo mismo es válido si se trata de un triángulo cuyo perímetro sea mayor, se tendrá que trazar un triángulo con lados de mayor tamaño.

- 1.- Las expresiones entre corchetes $[]$ representan líneas
- 2.- Las expresiones entre corchetes $\{ \}$ representan triángulos

Volvamos al triángulo {FF'P'} de la figura 3, cuyos vértices 1 y 2 se encuentran ubicados en una posición constante (focos de la elipse), el vértice 3 varía en su posición pero siempre sobre la línea que define a la elipse, si deseamos trazar un triángulo cuyo perímetro sea menor, su vértice 3 tendrá que encontrarse dentro del área encerrada en la elipse, sin tocar claro está, la línea que la define, y si por el contrario deseamos trazar un triángulo cuyo perímetro sea mayor, éste tendrá forzosamente que tener su tercer vértice fuera del área encerrada en la elipse también sin tocar la línea que la define.

Como podemos apreciar en la figura 3, todos los puntos de la tangente (superficie del espejo) quedan por fuera de la elipse con la única excepción del punto P' en que toca la línea que define la elipse, por lo tanto, para cualquier triángulo cuyo tercer vértice se encuentre sobre la tangente, el de menor perímetro será el que se encuentre sobre P', y dado que la distancia entre los vértices 1 y 2 es constante, la diferencia se encuentra en los dos lados restantes del triángulo. Con esto queda demostrado que el menor trayecto del rayo de luz que sale de A (F) y se refleja en el espejo (tangente) para llegar a B (F'), es aquel en el que el rayo incidente forma un ángulo igual al que forma el rayo reflejado con la superficie del espejo como se aprecia en las figuras 1 y 3, y esto sucede solo en el punto del espejo en el que es tangente a la elipse.

CONCENTRAR LA LUZ

La capacidad de ver, está en función de la cantidad de luz que reciben nuestros ojos y toda vez que la retina es la capa neural que transforma la luz en información que puede procesar nuestro cerebro, y se encuentra en el fondo del globo ocular, la luz que incide en esta tiene que pasar por un orificio en la parte anterior del ojo, la pupila, y en condiciones normales y con poca luz como es el caso de un observador de los objetos celestes, esta tiene en el humano unos 7 mm de diámetro.

De lo mencionado anteriormente se deduce que la cantidad de luz que se recibe está dada por el área, ya sea del orificio por donde pasa o de la superficie recolectora, como es el caso de una lente o espejo, de aquí la conveniencia de concentrar la luz que se colecta en una gran superficie, en un punto llamado foco para pasarla a través de la pupila. El área de una superficie circular, está dada por:

$a = \pi r^2$, de manera que para la pupila en condiciones de observación el área es:

$a = 3.1416 \times 3.5^2 = 38.48 \text{ mm}^2$, y para un espejo de 300 mm de diámetro:

$a = 3.1416 \times 150^2 = 70,686.00 \text{ mm}^2$, dividiendo esta entre el área de la pupila $70,686.00 / 38.48 = 1836.95$, esto quiere decir que con un espejo primario de 300 mm de diámetro, se capta 1,837 veces mas luz que con el ojo desnudo.

Conociendo el comportamiento de los rayos de luz que se reflejan en los espejos, ahora nos corresponde encontrar la forma de la superficie de un espejo que concentre los rayos de luz que lleguen a ella, en un punto.

ESPEJOS CÓNCAVOS

En el caso de los objetos a observar que por encontrarse a distancias tan grandes (prácticamente se consideran en el infinito), los rayos de luz, llegan al observador en forma paralela entre si y perpendiculares al plano de observación, obviamente la curvatura del espejo debe ser cóncava pues una superficie de curvatura convexa lejos de concentrar los rayos de luz en un punto los dispersará.

Analicemos una curvatura cóncava esférica, ver fig. 4, supongamos dos rayos de luz paralelos al eje de simetría, de tal manera que incidan en la superficie del espejo en los puntos donde los radios de valor igual a la unidad ($r = 1$), forman con el eje, ángulos de 45° y 30° respectivamente, estos rayos al reflejarse cortarán al eje en los puntos B' y B respectivamente, y con un poco de conocimientos de trigonometría vemos que las distancias $[CB'] = 0.5 / \text{sen}60^\circ = 0.577$ y $[CB] = \text{sen}45^\circ = 0.707$, por lo tanto la superficie esférica no satisface la condición de reunir todos los rayos de luz que incidan en su superficie de forma paralela al eje en un punto (foco).

Solo los rayos de luz paralelos al eje que incidan en la superficie del espejo dentro del área formada por los puntos en donde el radio forme un ángulo muy pequeño con el eje, coincidirán (y eso de forma aproximada) en un punto (foco), esto porque solo en esa área, el círculo se aproxima mucho a una curva que sin embargo si cumple con la esta condición, esta curva es la parábola, misma que en seguida analizaremos.

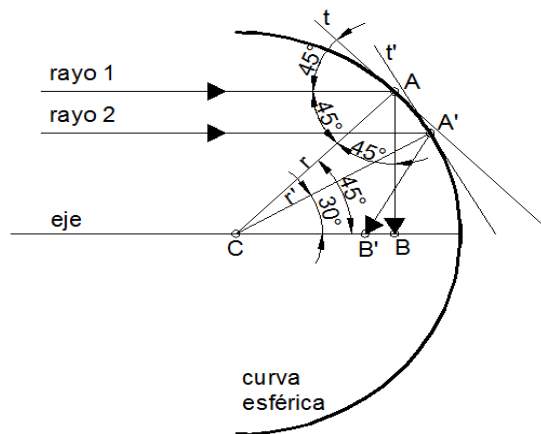


Fig. 4

LA PARÁBOLA

Por definición la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan del foco y a una recta llamada directriz (ver Fig. 5).

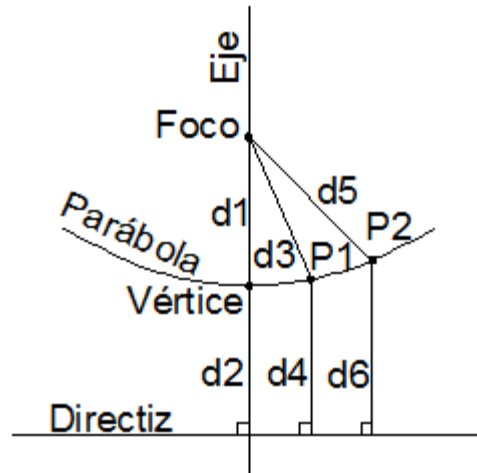


Fig. 5

El Vértice es el punto donde se interceptan el eje y la parábola, “P1” y “P2” son puntos sobre la parábola y las distancias $d1=d2$, $d3=d4$ y $d5=d6$, además la parábola es simétrica al eje.

PROPIEDADES ÓPTICAS DE LA PARÁBOLA

Ahora analicemos las propiedades ópticas de la parábola en su superficie cóncava.

En la Fig. 6 se traza una línea del foco a un punto “P” cualquiera sobre la directriz, sobre su punto medio, “P1” se traza una línea perpendicular (mediatriz) “t”, esta línea es la posición geométrica de todos los puntos equidistantes al foco “fp” y al punto “P”, ahora levantemos una perpendicular a la directriz en “P” hasta cortar la línea “t” en el punto “P2”, observemos que se forma un triángulo recto (P1-P-P2), si ahora trazamos una línea de “P2” a “fp” tendremos el triángulo (P1-P2-fp) y ambos triángulos son iguales, ya que el lado (P1-P2) es común y los lados (P1-P) y (P1-fp) también son iguales, de donde se deduce fácilmente que las distancias (fp-P2) y (P-P2) son iguales, por lo tanto “P2” pertenece a la parábola, pues solo aquí se cumple la condición de equidistancia al foco y a la directriz, del mismo razonamiento se comprende que la línea “t” es tangente a la parábola en el punto “P2”, pues solo en ese punto y en ningún otro toca a la parábola. Tomemos como ejemplo el punto “P3” también sobre “t”, aquí vemos que las líneas (fp-P3) y (P-P3), son iguales, sin embargo la distancia mas corta de P3 a la tangente “t” es la perpendicular a la directriz (P4-P3) y así vemos que “P3” no pertenece a la parábola del mismo modo que ningún otro punto sobre “t”.

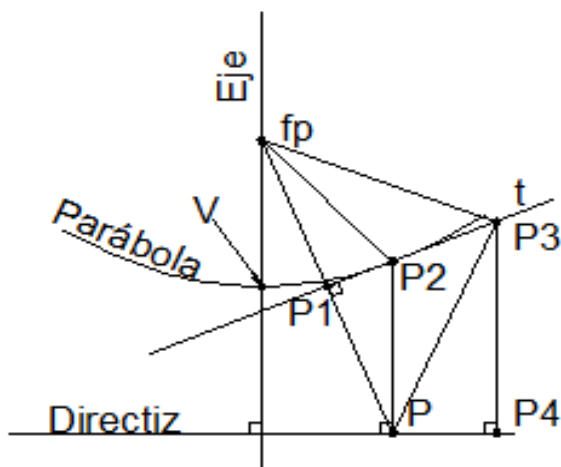


Fig. 6

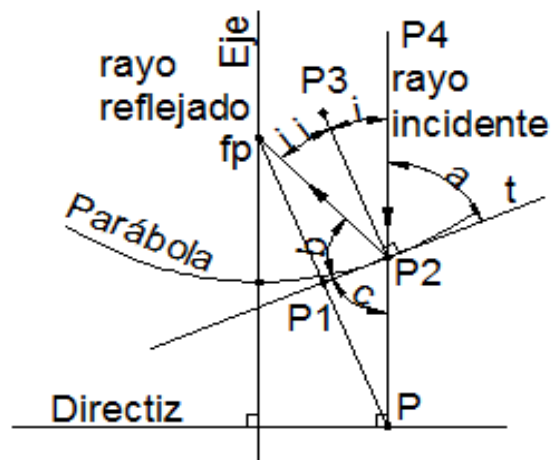


Fig. 7

La misma construcción y el mismo planteamiento se pueden aplicar para cualquier otro punto de la parábola.

Analicemos los rayos de luz que inciden en la parábola en forma paralela al eje, como es el caso de los que proceden de los objetos astronómicos a observar.

En la fig. 7 se ha trazado un rayo de luz paralelo al eje y que incide en la parábola en el punto "P2" y como podemos apreciar, los triángulos (fp-P2-P1) y (P-P2-P1), son iguales por lo tanto, los ángulos "b" y "c" también son iguales y el ángulo "a", está formado por las mismas líneas (P-P4) y "t" solo que opuesto por el vértice de manera que es igual al ángulo "c", luego la línea (P2-P3) es perpendicular a "t", el ángulo ["a"+"i"] al igual que el ángulo ["b"+"ii"] son igual a 90° de donde "i" = "ii" con lo cual queda demostrado que los rayos de luz que inciden en la cara cóncava de un espejo parabólico se reflejan al foco.

Mas adelante en nuestro análisis, necesitaremos conocer la posición de algunos puntos de la parábola por lo tanto procederemos a analizarla matemáticamente.

Ubiquemos la parábola horizontalmente en un sistema cartesiano de coordenadas, de tal manera que el vértice coincida con el origen V(0,0), su eje se encuentre sobre el eje de las X, el foco (llamémosle "fp") en el cuadrante I fp(x,0), por lo tanto, de acuerdo con la descripción de la parábola mencionada al principio, la directriz se encuentra paralela al eje de las Y a una distancia igual a la del foco solo que en el cuadrante II, de manera que el punto p donde la directriz corta al eje de las X se encuentra en p(-x,0) y cualquier punto de la parábola que se encuentra en el cuadrante I, estará a "a" unidades del eje Y y a "b" unidades del eje X como en p1(a,b), ver Fig. 8

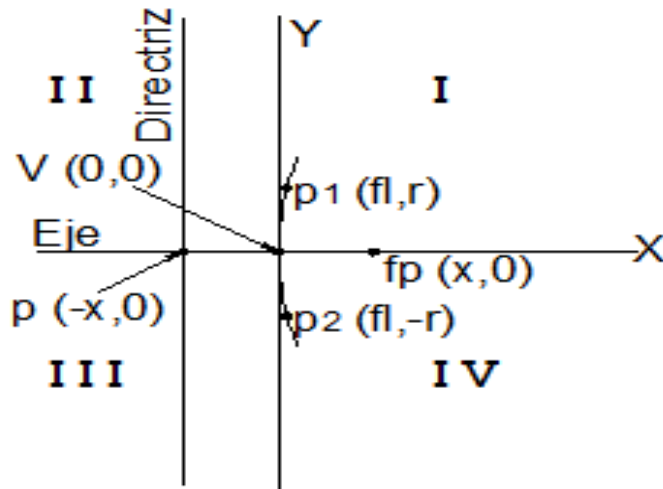


Fig. 8

No es mi intención aquí, desarrollar la formula que relaciona los valores de las coordenadas de las parábolas, para ello se pueden consultar libros de geometría analítica, baste con señalar que para una parábola con vértice en el origen y eje sobre el de las X, la formula es:

$$y^2 = 4fx \quad (2)$$

para el ejemplo de la fig. 8:

$$r^2 = 4(x)(fl) \quad (3)$$

$$fl = r^2/4(x) \quad (4)$$

en donde "r" es el radio del espejo primario, "fl" es la flecha de la curvatura y "x" es igual a la distancia focal.

LA HIPÉRBOLA

Otra curva que debemos considerar es la hipérbola, la cual es por definición, el lugar que ocupan los puntos cuya diferencia en distancia a dos puntos llamados focos es constante:

$$d2 - d1 = k \quad (5)$$

Ver Fig. 9

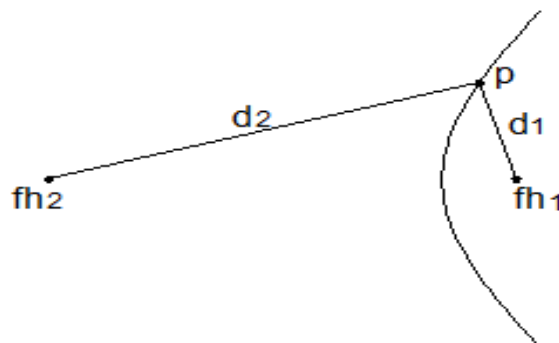


Fig. 9

La línea que une los focos se llama eje y el punto de intersección del eje con la hipérbola es el vértice.

Existe otra posición en que se cumple con la condición antes mencionada, es la de los puntos que ocupan el lugar de la curva simétricamente reflejada y cuyo vértice “vh2” dista del foco “fh2” la misma distancia que el vértice “vh1” del foco “fh1”, ver Fig. 10

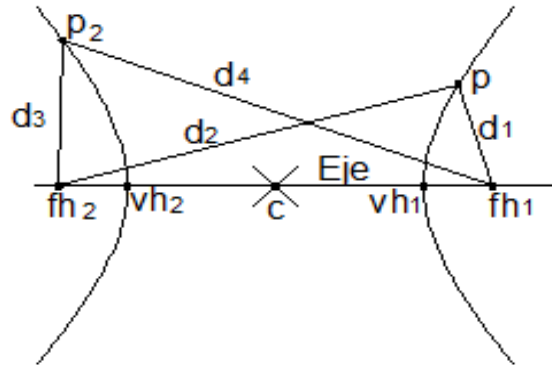


Fig. 10

Aquí también $d_4 - d_3 = k$ como $d_2 - d_1 = k$, lo mismo que para cualquier punto sobre las dos curvas, y el punto sobre el eje que equidista de los focos es el centro “c”.

PROPIEDADES ÓPTICAS DE LA HIPÉRBOLA

Para entender como se refleja la luz en la superficie convexa de la hipérbola, hagamos la siguiente construcción.

Tracemos un círculo con centro en “p” y radio igual a “d1”, ver Fig. 11

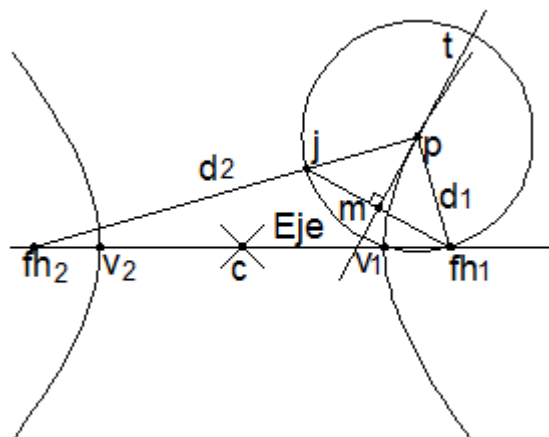


Fig. 11

Desde el punto de intersección del círculo con “d₂”, “j” tracemos una línea recta hasta el foco “fh₂”, en el punto medio de esta, tracemos una perpendicular la cual es tangente de la hipérbola, pues solo el punto “p” es común a ambas líneas (hipérbola y tangente), y la misma construcción se puede realizar para cualquier otro punto de la hipérbola.

Supongamos un rayo de luz que incide sobre la superficie convexa de la hipérbola y que se dirige hacia el foco “fh₁”, forma un ángulo “b” con la tangente “t”, el cual resulta ser igual al ángulo “c” por ser formados por las mismas líneas rectas y separados por el vértice, ahora tracemos una línea “pe” perpendicular a “t”, de las leyes de la reflexión sabemos que los ángulos de incidencia “i” y de reflexión “ii” son iguales, además como el ángulo “b” es complementario a el ángulo “i” ($b + i = 90^\circ$) y el ángulo “a” lo es del ángulo “ii” ($a + ii = 90^\circ$), el ángulo “a” es igual a el ángulo “b” por lo que el rayo reflejado es coincidente con la línea “p – fh₂” lo que indica que se refleja en “fh₂”, y así para cualquier otro punto de la hipérbola, ver Fig.12.

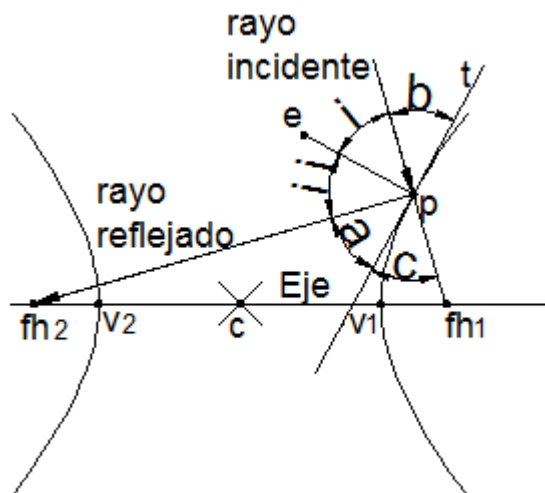


Fig. 12

Analizaremos matemáticamente a la hipérbola, ya que también en este caso será necesario conocer la posición de algunos de sus puntos.

Ubiquemos la hipérbola horizontalmente en un sistema cartesiano de coordenadas, de tal manera que el centro “c” coincida con el origen $c(0,0)$, su eje se encuentre sobre el eje de las X, ver Fig. 13

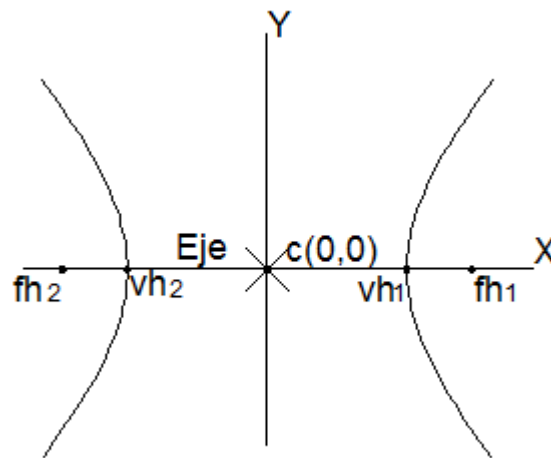


Fig. 13

Tracemos un círculo con centro en el origen y que pase por los focos, en seguida levantemos un par de líneas paralelas al eje Y, que pasen por los vértices “vh1” y “vh2” cuya distancia al origen llamemos “a”, en los puntos “h” de intersección con el círculo tracemos un par de líneas paralelas al eje X, llamemos “b” a su distancia al eje X, ahora tracemos las diagonales del rectángulo, estas líneas son tangentes a la hipérbola y se llaman asíntotas, además, la distancia “c-h” es el radio, por lo que es también igual a la distancia del origen a cualquiera de los focos ver Fig. 14

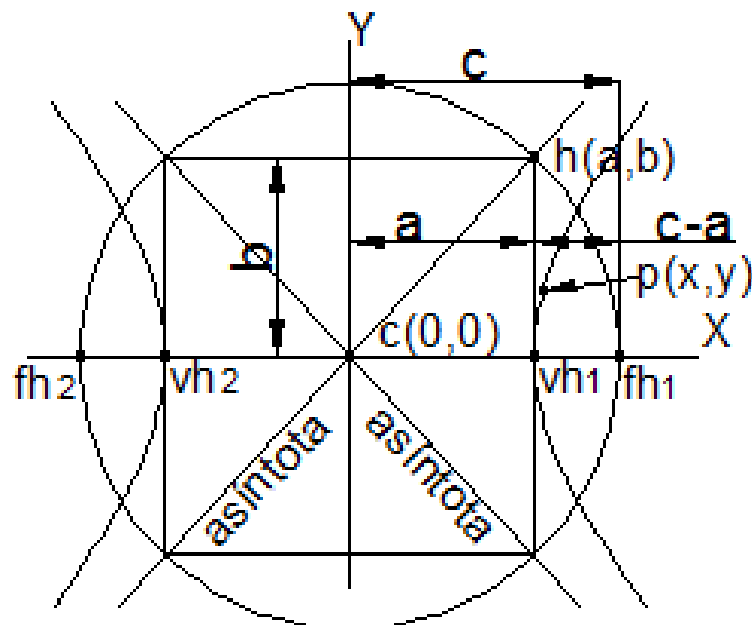


Fig. 14

De lo anterior tenemos que la línea que va del origen al punto “h” (llamémosle “c”) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son “a” y “b”, y por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (6)$$

En una Hipérbola con centro C (0,0) y eje horizontal (sobre el eje X), los vértices se encuentran a una distancia “a” del centro y los focos a una distancia “c” también del centro (ver fig. 14),

Tampoco aquí analizaremos la ecuación de las hipérbolas, solo mencionaremos que la ecuación de la hipérbola con eje horizontal y centro en C (0,0) es:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad (7)$$

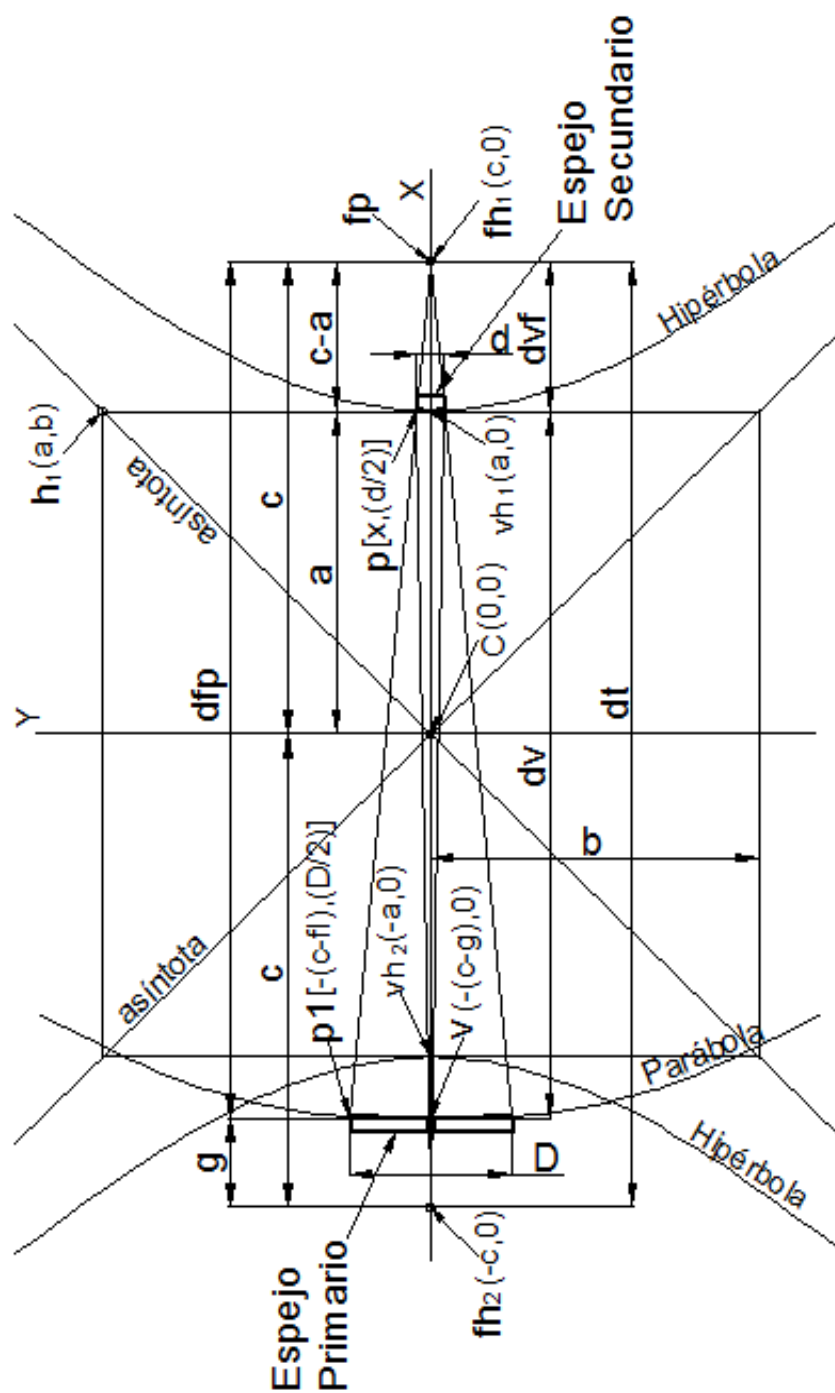
Esta es la ecuación canónica de la hipérbola con eje horizontal y centro en c (0,0) ver Fig. 14.

Habiendo visto lo anterior, sabemos como se comporta la luz que se refleja en las superficies parabólicas e hiperbólicas así como también podemos encontrar matemáticamente la posición de cualquier punto que forme parte de estas curvas siempre que se encuentren en un marco de referencia, dicho lo anterior pasemos al diseño de nuestro telescopio.

DISEÑO DEL TELESCOPIO (SISTEMA OBJETIVO)

Atendiendo al sistema como se consiga la focalización de la luz, existen dos tipos de telescopios astronómicos, los refractores y los reflectores. De los estudios que hemos venido haciendo sobre la reflexión de la luz en los párrafos anteriores, se intuye que nuestro propósito es el diseño de un telescopio reflector, ello obedece a diferentes razones, entre otras que son menos superficies que pulir, se evita la aberración cromática, se puede conseguir aperturas mucho mayores que con los telescopios refractores, se encuentra dentro de las posibilidades de construcción, etc.

Existen diferentes arquitecturas para los telescopios reflectores, yo escogí el de foco Cassegrain clásico, porque se puede conseguir una excelente potencia con unas dimensiones que permiten su manejo con comodidad, la arquitectura de estos telescopio fue desarrollada por un cura francés de nombre Laurent Cassegrain alrededor del año 1690 y en la que utiliza un par de espejos para el manejo de la luz, uno de ellos el primario es de superficie parabólica cóncava de revolución y el otro o secundario es de superficie hiperbólica convexa de revolución, en la figura 12 se puede apreciar una superposición de los espejos en el marco de referencia de la hipérbola (X,Y) que analizamos arriba y que se plasmó en la Fig. 14, aquí hacemos coincidir el foco de la parábola “fp” con el foco de la hipérbola “fh1”, el foco “fh2” con el punto de emergencia “g” y por consiguiente el eje de la parábola con el eje “X”. En la fig. 15 se ubican los componentes del telescopio (espejo primario y espejo secundario) sobre las gráficas de las curvas (parábola e hipérbola) en un sistema de coordenadas cartesianas.



Esquema del telescopio donde se señalan los componentes y parámetros

Fig. 15

Ahora tendremos que escoger algunos parámetros de nuestro telescopio como son el diámetro del espejo primario “D” así como su distancia focal “dfp”, el diámetro del espejo secundario “d” y la emergencia “g” que no es otra cosa que la distancia que sobresale el foco del sistema hacia la parte posterior del vértice del espejo primario con el objeto de poder ubicar las lentes oculares con comodidad para la observación, además influye en la potencia del telescopio, toda vez que es el resultado de dividir la distancia que recorre la luz desde el espejo primario hasta el foco “fh2” entre la distancia focal del complejo del lente ocular. Todas las medidas y los cálculos se realizarán en milímetros.

La importancia del diámetro del espejo primario, radica en que la capacidad de recolectar la luz está en función del área del espejo, por lo que se desea tener el mayor diámetro posible, lo que a su vez estará limitado por nuestra capacidad de construcción y manejo tanto del espejo como del telescopio con todos sus componentes.

Escogí un diámetro de 300.00 mm para el espejo primario, “D” = 300.00mm, ya que está en mis posibilidades tanto la construcción como el manejo del telescopio, su distancia focal “dfp”, la determinaré a partir de la relación focal “# F” recomendada para los telescopios catadióptricos para obtener buenos resultados en brillantez, amplificación y potencia que es aproximadamente “# F” = 10, y toda vez que la luz recorrerá aproximadamente el doble de la distancia focal del espejo primario tendremos una “# F” = 5 para éste, y como la relación focal está dada por el cociente de la distancia focal entre el diámetro, “# F” = “dfp” / “D”, de donde:

$$D = 300.00 \text{ mm} \quad (8)$$

$$\# F = 5 \quad (9)$$

$$dfp = D \times 5$$

$$dfp = 300.00 \text{ mm} \times 5$$

$$dfp = 1,500.00 \text{ mm} \quad (10)$$

Para determinar el diámetro del espejo secundario es muy importante que tengamos en cuenta la obstrucción al paso de la luz sobre el espejo primario, ya que se desea captar la mayor cantidad de esta, por lo que su área no deberá de exceder de un 3% de la de éste, por lo tanto:

$$\text{área del espejo primario: } ap = \pi \times (D / 2)^2$$

$$ap = 3.1416 \times (150.00\text{mm})^2$$

$$ap = 70,686.00 \text{ mm}^2 \quad (11)$$

$$\text{área máxima del espejo secundario : } as = ap \times 3 \%$$

$$as = 70,686.00 \text{ mm} \times 0.03 = 2,120.58 \text{ mm} \quad (12)$$

$$\text{diámetro del espejo secundario: } d = 2 \sqrt{as / \pi}$$

$$d = 2 \sqrt{2,120.58 / 3.1416}$$

$$d = 51.96 \text{ mm}$$

como 2 pulgadas es una medida estándar y equivale a 50.8 mm se escoge esta como diámetro del secundario toda vez que su área representa menos del 3%

$$d = 50.8 \text{ mm} \quad (13)$$

Como se mencionó anteriormente, la emergencia “g” es la distancia desde el vértice “V” del espejo primario hasta el punto donde se focaliza la luz “fh2”, por comodidad le daré un valor de 150.00 mm.

$$g = 150.00 \text{ mm} \quad (14)$$

Los focos “fh1” y “fh2” de la hipérbola, deberán coincidir con el “fp” de la parábola y con el punto de emergencia “g” para que los rayos de luz coincidan en “fh2”, esto de acuerdo con el análisis de las propiedades ópticas, tanto de la parábola como de la hipérbola que se realizo mas arriba.

Para determinar la distancia en que colocaremos el espejo secundario en relación al espejo primario, esto es la distancia entre vértices “dv”, tendremos que considerar el cono de luz que se forma al salir los rayos del espejo primario a coincidir en “fp”. El área del espejo secundario debe coincidir con la sección de dicho cono, ya que se desea captar la totalidad de la luz y el diámetro de la sección del cono que coincide con el área del espejo secundario es a la distancia entre el vértice del espejo secundario al foco “dvf”, como lo es la distancia del vértice del espejo primario al mismo foco “dfp”, por lo tanto:

$$\begin{aligned} D / dfp &= d / dvf \\ dvf &= [d \times (dfp / D)] \\ dvf &= 50.8 \times (1,500.00 / 300.00) \\ dvf &= 254.00 \text{ mm} \end{aligned} \quad (15)$$

La distancia total entre focos es igual a la suma de la distancia focal del espejo primario, mas la emergencia, de donde:

$$\begin{aligned} dt &= dfp + g \\ dt &= 1,500.00 + 150.00 \\ dt &= 1,650.00 \text{ mm} \end{aligned} \quad (16)$$

La distancia entre vértices “dv” es el resultado de restar la distancia focal del espejo secundario “dvf” de la distancia focal del espejo primario “dfp” de donde:

$$\begin{aligned} dv &= dfp - dvf \\ dv &= 1,500.00 - 254 \\ dv &= 1,246.00 \text{ mm} \end{aligned} \quad (17)$$

La longitud de la cubierta “dc”, deberá ser un poco mayor que la distancia entre vértices “dv” mas el grosor de los espejos, si consideramos 2 pulgadas para el primario y una pulgada para el secundario tendremos:

$$\begin{aligned} dc &= dv + 76.20 \\ dc &= 1,246.00 + 76.20 \\ dc &= 1,322.20 \text{ mm} \end{aligned} \quad (18)$$

La longitud de la cubierta deberá ser de 1,322.20 mm como mínimo y se escogió una longitud de 1,400.00 mm.

En la figura 16 consignamos los valores calculados sobre el esquema del telescopio de la figura 15, solo hace falta calcular la profundidad del tallado o sea el valor de la ordenada de los puntos p de la hipérbola y de p1 de la parábola, lo cuál haremos en seguida.

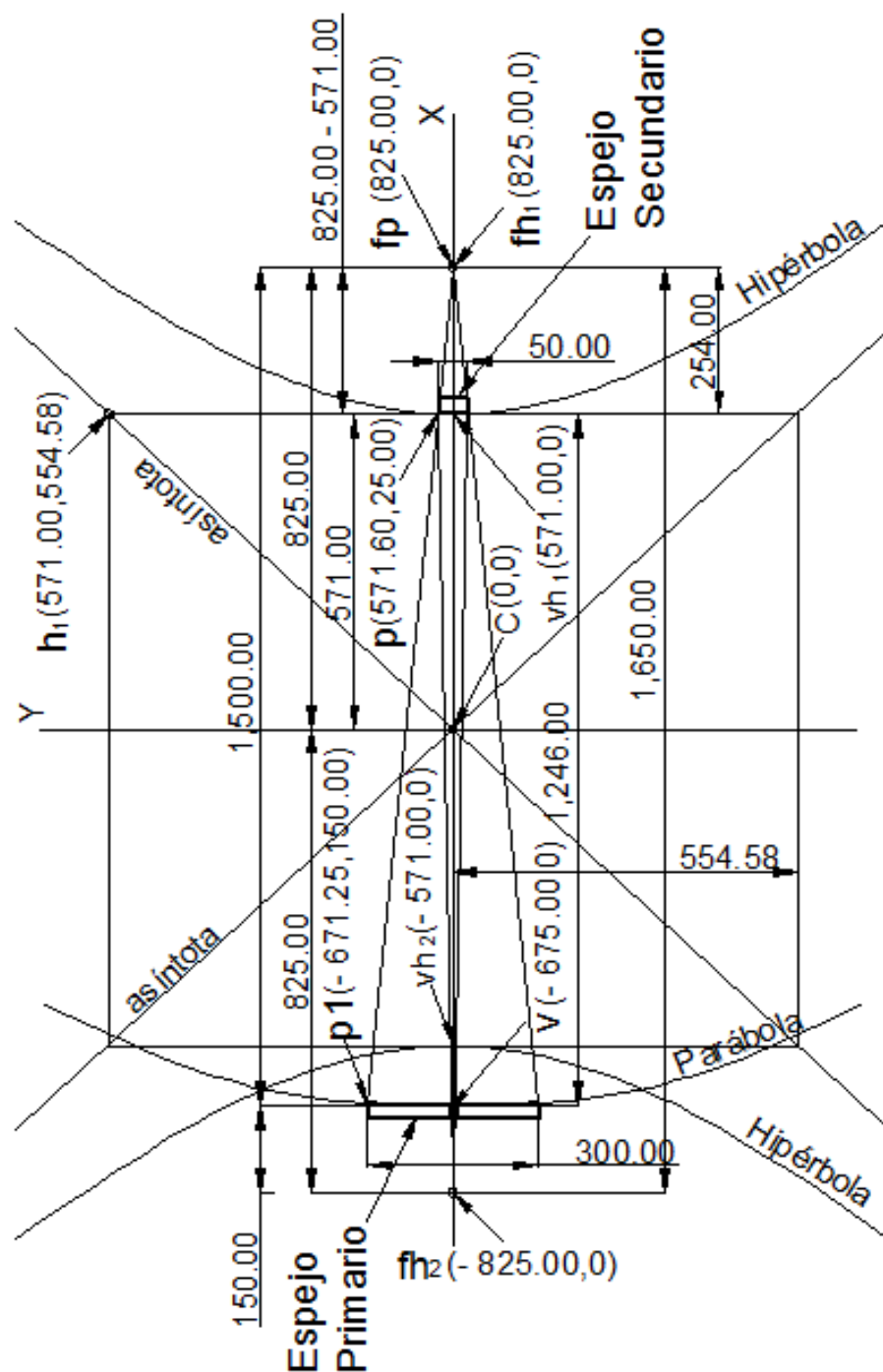


Fig. 16

Medidas en milímetros

Para los valores de las ordenadas (x) de los puntos "p" y "p1" que representan las profundidades de los tallados de los espejos primario y secundario respectivamente, es necesario seguir el texto mas adelante.

Con esto, hemos conseguido dimensionar nuestro telescopio, tenemos la longitud total, el diámetro de los espejos, las distancias focales, las distancias entre los espejos y la ubicación de los focos, sin embargo toda vez que resulta muy difícil tallar una superficie cuyo corte medial es una parábola (y mas aun el de una hipérbola), tendremos que encontrar las esferas cuya sección sea lo más aproximado a nuestras curvas.

Siguiendo los cálculos para un espejo esférico, se tiene que el radio de curvatura $R = f \times 2$, lo cual quiere decir que el radio de curvatura es igual al doble de la distancia focal, pero su derivación depende de una serie de consideraciones como que la apertura sea muy pequeña en relación al radio, tomar el ángulo en lugar de su tangente, despreciar valores muy pequeños en los cálculos. etc., nosotros haremos el estudio utilizando la geometría analítica.

Primeramente buscaremos la profundidad del tallado del espejo primario, como se puede apreciar en la figura 5, el valor de la coordenada “fl” del punto p1, es igual a la flecha de curvatura y el valor de “r” es igual al radio del espejo, por lo que en primera instancia procederemos a localizar el valor de “fl” y para ello utilizaremos la ecuación de la parábola en (3):

$$fl = r^2 / 4x \quad (3)$$

$$fl = r^2 / 4(df_p)$$

$$fl = (150.00)^2 / 4(1,500.00) \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$fl = 22,500 / 6,000$$

$$fl = 3.75 \text{ mm.} \quad \text{Profundidad del tallado de la parábola} \quad (19)$$

La profundidad del tallado del espejo primario deberá ser de 3.75 milímetros, ahora tenemos que encontrar el valor del radio de la circunferencia que pasa por el origen y por p1, para lo cual nos apoyaremos en la Fig. 17

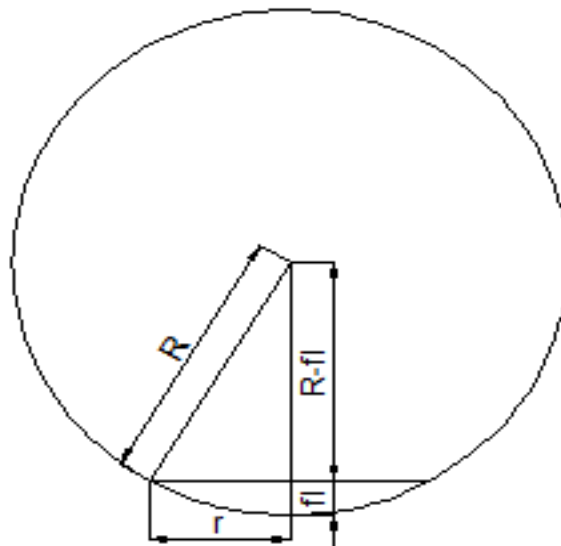


Fig. 17

Del teorema de Pitágoras tenemos que:

$$R^2 = (R - fl)^2 + (r)^2$$

$$R^2 = R^2 - 2Rfl + fl^2 + (r)^2$$

resolviendo el binomio

$$1 = -2Rfl + fl^2 + (r)^2$$

dividiendo entre R^2

$$1 + 2Rfl = fl^2 + (r)^2$$

sumamos $2Rfl$

$$1 + R = (fl^2 + (r)^2) / 2fl$$

dividiendo entre $2fl$

$$R = \{[fl^2 + (r)^2] / 2fl\} - 1$$

despejando R

(20)

$$R = \{[(3.75)^2 + (300.00/2)^2] / (2 \times 3.75)\} - 1$$

sustituyendo valores

$$R = \{[14.06 + 22,500] / 7.5\} - 1$$

$$R = 3,001.87 - 1$$

$$R = 3,000.87 \text{ mm.}$$

(21)

Requerimos de una curva de circunferencia de 3,000.87 mm. de radio para nuestro espejo primario.

Por lo que podemos apreciar, después de nuestro exhaustivo análisis, la diferencia entre el valor obtenido y el que se obtiene multiplicando la distancia focal por dos, es irrelevante, sin embargo podemos calcular lo que esta diferencia significa en la aproximación con la parábola.

Sabemos que la ecuación cuadrática de un círculo con centro en (h,k) es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En nuestro caso “x” es igual a “fl”, “h” es igual “R”, “y” es igual a “r” (radio del espejo), “k” es igual a “0” (abscisa del centro de la circunferencia) y “r” también es igual a “R” (radio de la circunferencia), por lo que sustituyendo valores:

$$(fl-R)^2 + (150.00-0)^2 = R^2$$

$$(fl-R)^2 + 22,500.00 = R^2$$

$$(fl)^2 - 2(fl)R + R^2 + 22,500.00 = R^2$$

resolviendo el binomio

$$(fl)^2 - 2R(fl) + 22,500.00 = 0$$

restando R^2 en ambos lados

La anterior es una ecuación de segundo grado o cuadrática para cuyo caso el valor de “fl” viene dado por:

$$fl = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$fl = \frac{-(-2R) \pm \sqrt{(-2R)^2 - 4(1)(22,500.00)}}{2(1)}$$

$$f_l = \frac{2R \pm \sqrt{(-2R)^2 - 90,000.00}}{2}$$

$$f_l = \frac{6,000.00 \pm \sqrt{36,000,000.00 - 90,000.00}}{2}$$

$$f_l = 3.7525 \quad \text{para } R = 3,000.00$$

$$f_l = 3.7515 \quad \text{para } R = 3,000.87$$

Como podemos ver, la diferencia en la aproximación con la parábola en el extremo del espejo ($f_l = 3.75$) es de 0.0025 mm para el círculo de 3,000.00 mm de radio y 0.0015 mm para el círculo de 3,000.87 mm de radio, la diferencia entre un círculo y otro en la aproximación es de 0.001 mm, ¡una milésima de milímetro!

Por lo que podemos observar, es de suma importancia la precisión que podamos conseguir a la hora de realizar el trabajo de pulido de los espejos.

Procederemos en seguida a calcular la profundidad “ f_l ” del tallado del espejo secundario, siguiendo el mismo criterio que con el espejo primario y suponiendo que el punto “ p ” se encuentra sobre el borde externo del espejo secundario, por lo que el valor de la coordenada “ y ” será igual al del radio del espejo o $d/2$, haciendo referencia a la figura 11 tenemos que:

$$d=50.8 \quad \text{diámetro del espejo} \quad (13)$$

$$y=d/2$$

$$y=50.8/2 \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$y=25.4 \text{ mm.} \quad (22)$$

También en la figura 14 vemos que la distancia entre los focos “ f_{h1} ” y “ f_{h2} ” es igual a $2c$, y de la figura 15 sabemos que esa distancia es “ dt ”=1650.00mm por lo tanto:

$$dt=1650.00 \quad (16)$$

$$c=dt/2 \quad (23)$$

$$c=825.00\text{mm.} \quad (24)$$

Para calcular el valor de “a” de nuestra hipérbola, sabemos de la figura 14 que “a” es igual a c menos la distancia que hay del vértice “vh1” al foco “fh1” y esta distancia en la figura 15 es igual a “dvf” por lo que:

$$dvf=254.00 \quad (15)$$

$$a=c-dvf \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$a=825.00-254.00$$

$$a=571.00 \quad (25)$$

el valor de “b” está dado por (6):

$$c^2=a^2+b^2 \quad (6)$$

$$b^2=c^2-a^2 \quad \text{despejando b}$$

$$b^2=(825.00)^2-(571.00)^2$$

$$b=554.58 \text{ mm.} \quad (26)$$

Para calcular el valor de la coordenada x la cual es el valor de la profundidad que estamos tratando de encontrar, utilizaremos la ecuación de la hipérbola:

$$x^2/a^2=1+y^2/b^2 \quad \text{ecuación de la hipérbola} \quad (7)$$

$$x^2=(1+y^2/b^2)a^2 \quad \text{despejando } x^2$$

$$x^2=[1+(25.4)^2/(554.58)^2](571.00)^2 \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$x^2=[1+(645.16/307,558.98)]326,041.00$$

$$x=571.60 \quad (27)$$

Como sabemos que el vértice “vh1” se encuentra a “a” unidades del origen, la profundidad del tallado del espejo secundario se obtendrá de restar el valor de “a” al valor de la coordenada “x” en (27) de donde:

$$a=571.00 \quad (25)$$

$$x=571.60 \quad (27)$$

$$fl=x-a$$

$$fl=571.60-571.00$$

$$fl=0.60 \text{ mm} \quad \text{profundidad del tallado de la hipérbola} \quad (28)$$

Para el radio de curvatura del espejo secundario podemos aplicar el mismo criterio, utilizamos la misma fórmula descrita en (20)

$$R=\{[fl^2+(r)^2]/2fl\}-1 \quad (20)$$

$$R=\{[(0.60)^2+(25.4)^2]/2 \times 0.60\}-1 \quad \text{sustituyendo valores}$$

$$R=[(0.36+645.16)/1.20]-1$$

$$R=537.93-1$$

$$R= 536.93 \text{ mm.}$$

Para el espejo secundario se requiere de una curva de circunferencia de 536.93 mm de radio.

En este punto sobre el diseño de la parte objetiva del telescopio y tomando en consideración que el foco “fh2” donde se forman las imágenes, se encuentra por detrás del espejo primario por lo tanto, solo nos resta calcular el diámetro del orificio que tenemos que practicar en el centro del espejo primario (parabólico) con el propósito de permitir pasar a los rayos de luz que proceden del espejo secundario (hiperbólico) para focalizarse en el foco “fh2”.

Observando la Fig. 15 vemos que los rayos de luz que proceden del espejo secundario para coincidir en el foco “fh2” forman un cono cuya base es un círculo de diámetro “d” igual al del espejo secundario 50.8 mm. y con una distancia base a vértice igual a “dv” + “g”.

Ahora consideremos un plano perpendicular al eje y que corte al cono en el vértice “V” del espejo primario, aquí la sección del corte es un círculo cuyo diámetro “q” es proporcional al diámetro de la base “d” del cono en la misma relación que su distancia al foco “g” lo es de “dv” + “g”, de donde:

$$q/g=d/(dv+g)$$

multiplicando por g

$$q=(d)(g)/(dv+g)$$

sustituyendo valores

$$q=50.8 \times 150 / (1246.00 + 150)$$

$$q=7620 / 1346$$

$$q=5.46 \text{ mm.}$$

El diámetro “q” de la sección del cono de luz a la altura del vértice del espejo primario es de 5.46 mm. y el diámetro del orificio deberá ser un poco mayor, una medida común de broca es la de ¼ de pulgada que equivale a 6.35 mm, por lo que tomaremos ese valor para “q”

$$q=6.35 \text{ mm.}$$

La potencia “M” del telescopio, estará dada por la división de la distancia total que recorre la luz a partir del espejo primario en “v” hasta el foco “fh2”, dividido entre la distancia focal del ocular, por lo tanto debemos calcular esta distancia que llamaremos “L”, ver Fig. 15 de donde:

$$L=2dv+g$$

$$L=2(1246)+150$$

sustituyendo valores (ver Fig. 16)

$$L=2642.00 \text{ mm.}$$

Suelen utilizarse oculares con diferentes distancias focales para obtener una adecuada potencia según la aplicación que se desee dar al telescopio.

La figura 18 es un dibujo simplificado del telescopio con las dimensiones importantes para su construcción.

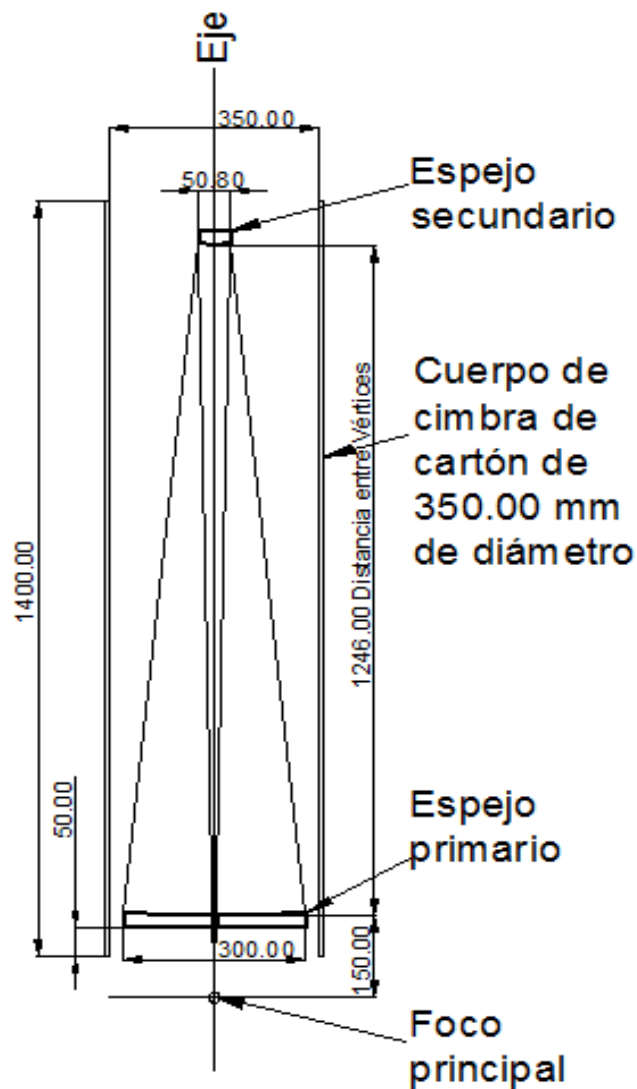


Fig. 18
Medidas en milímetros

Espejo Primario (Parabólico): Diámetro = 300.00 mm
 Flecha = 3.75 mm Radio de curvatura = 3,000.87 mm
 Orificio = 6.35 mm (1/4")

Espejo secundario (Hiperbólico): Diámetro = 50.80 mm (2")
 Flecha = 0.60 mm Radio de curvatura = 536.93 mm
